1. Aufgabe (Alles ist Mathematik – Zerlegungen überall):

a)

Es gibt für den Zahlenbereich der natürlichen Zahlen sechs mögliche Lösungen:

5+6+7=4+6+8=3+6+9=2+6+10=1+6+11=6+6+6=18

In anderen Zahlbereichen kann man natürlich unendlich viele Lösungen produzieren.

b)

125 kann in 25+25+25+25+25 = 125 zerlegt werden.
Die mittlere Zahl dieser Zerlegung ist 25.
Wie groß kann der Unterschied (Differenz) zwischen zwei benachbarten Zahlen höchstens sein?
Zwischen dem ersten und dem mittleren Summanden liegt der Unterschied zweimal. 25 minus zweimal den Unterschied muss eine natürliche Zahl sein, der Unterschied kann also maximal nur 12 zwischen zwei benachbarten Zahlen sein.

Deshalb sind *nur* folgende Zerlegungen möglich:
23+24+25+26+27=125
21+23+25+27+29=125
19+22+25+28+31=125
17+21+25+29+33=125
15+20+25+30+35=125
13+19+25+31+37=125
11+18+25+32+39=125
9+17+25+33+41=125
7+16+25+34+43=125
5+15+25+35+45=125
3+14+25+36+47=125
1+13+25+37+49=125

c)
Alle Summanden sollen, ungerade sein und größer Null, deshalb gilt für $n \in IN$:
2n+1 sei der Term für die kleinste geforderte ungerade natürliche Zahl, der nächst größere Term ist dann 2n+3.
Für die folgenden vier weiteren Terme für ungeraden Zahlen gilt dann 2n+5, 2n+7, 2n+9 und 2n+11. Man erkennt leicht, dass sich je zwei benachbarte Zahlen immer um 2 unterscheiden.
Addiert man die sechs Terme so erhält man:
(2n+1) + (2n+3) + (2n+5) + (2n+7) + (2n+9) + (2n+11) = 6·2n + 36 = 12 (n+3)
Diese Summe soll gleich 2016 sein.
Termumformungen liefern:
⇔2016 = 12 (n+3)
⇔ 168 = n + 3
⇔ 165 = n

Für die kleinste ungerade Zahl gilt: (Term T(n) = 2n+1), also T(165) = 2·165+1 = 331
Die kleinste Zahl ist 331.
Eine mögliche Zerlegung von 2016 ist 331+333+335+337+339+341 = 2016.

d)
Da der Abstand zwischen zwei ungeraden Zahlen immer gerade ist, gilt folgender Ansatz:
(Der Term 2n+1 entspricht hier der kleinsten ungeraden natürlichen Zahl)

(2n+1)+ (2n+1+2x)+ (2n+1+4x)+ (2n+1+6x)+ (2n+1+8x)+ (2n+1+10x)=12n+30x+6
Also 12n+30x+6=2016 bzw. nach einigen Termumformungen 2n+5x =335

Welche Lösungen gibt es überhaupt? Wir führen dazu eine vollständige Fallunterscheidung durch. Wie man sieht, muss man nur die Termwerte für ungerade x untersuchen:

x	2|335-5x	n	kleinste Zahl 2n+1	Zerlegungen von 2016
0	nein	-	-	
1	ja	165	331	331, 333, 335, 337, 339, 341
2	nein	-		
3	ja	160	321	321, 327, 333,339, 345, 351
5	ja	155	311	311, 321, 331, 341, 351, 361
7	ja	150	301	301,315, 329, 343, 357, 371
9	ja	145	291	291, 309, 327, 345, 363, 381
11	ja	140	281	281, 303,325, 347, 369,391
13	ja	135	271	271, 287, …
15	…	130	261	261, 291, …
17	…	125	251	251, 285, …
...	…	…	…	…
65	ja	5	11	11, 141, 271, 401, 531, 661
67	ja	0	1	1, 135, 269, 403, 537, 671

e)

Ist *abc* größer als *cba* und *a* größer als *c*, so berechnet man die Differenz der beiden Zahlen: *abc – cba = xyz.* Da *c* kleiner als *a* ist, muss bei der Einerstelle 10 ergänzt werden. Dies ist bei der Zehnerstelle als Übertrag zu berücksichtigen. Nun ist aber das *b* des Minuenden kleiner als *b*+1 des Subtrahenden, so dass auch bei der Zehnerstelle 10 ergänzt werden muss. Nach diesen Überlegungen lass sich die Ziffern *x, y, z* so durch die Ziffern *a, b, c* darstellen:
$z = 10+c-a$,
$y = (10+b)-(b+1)=9$,
$x = a-c-1$
Die Summe von *xyz* und *zyx* ist dann:

$$\begin{aligned} xyz+zyx &= 100x+10y+z+100z+10y+x \\ &= 101(x+z)+20y \\ &= 101(a-c-1\ +\ 10+c-a)+20\cdot 9 \\ &= 101\cdot 9+20\cdot 9 \\ &= 1089 \end{aligned}$$

Als Ergebnis kommt demzufolge immer 1089 heraus.

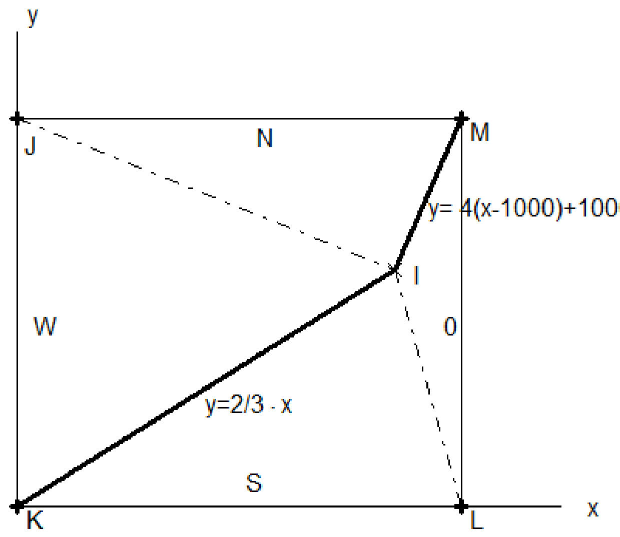
2. Aufgabe (Erbfall):

a)

Die Fläche von 100 Hektar ist ein Quadratkilometer groß. Folglich hat das Quadrat 1 km lange Seitenlinien. Die Höhen h(o), h(s), h(w), h(n) bestimmen den Inhalt der Dreiecksflächen o, s, w und n, weil alle Grundseiten 1km lang sind.

Fall 1 Verhältnisse der Anteile o:w = 1:4 und s:n = 3:2
dies bedeutet für die Dreieckshöhen h(o):h(w) = 1:4 und h(s):h(n) = 3:2. Die Höhen einander gegenüberliegender dreieckiger Anteile sind zusammen genau 1 km lang; die Flächen gegenüberliegender Dreiecke machen also die Hälfte der Quadratfläche aus. Dadurch erhielte Oliver ein, Nancy zwei, Sue-Allen drei und Wayne vier Zehntel der Quadratfläche; die Differenz zwischen den Anteilen zweier Erben wäre maximal drei Zehntel dieses Wüstenquadrats.

Fall 2 Aufteilungsschlüssel o:n = 1:4 und s:w = 2:3



dies bedeutet für die Höhen h(o):h(n) = 1:4 und h(s):h(w) = 2:3. Gesucht ist also ein Punkt I im Quadrat als gemeinsamer Punkt aller Aufteilungsdreiecke. Um ihn zu ermitteln, betten wir das Quadrat in ein kartesisches Koordinatensystem mit den Eckpunkten J(0/1000), K(0/0), L(1000/0) und M(1000/1000) und „Landkartennorden oben“ (LE=1 m). I liegt auf einer Ursprungsgeraden mit Steigung zwei Drittel, weil die Höhe h(s) zwei Drittel von h(w) betragen muss. Außerdem liegt I auf einer Geraden mit Steigung 4 durch den Punkt (1000/1000). I(900/600) erfüllt die relevanten Geradengleichungen.
Folglich gilt h(o)=100 m, h(w)=900 m, h(n)=400 m und h(s)=600 m. Oliver erhielte ein Zwanzigstel, Nancy ein Fünftel, Sue-Allen drei Zehntel und Wayne neun Zwanzigstel dieser Quadratfläche; die Differenz zwischen den Anteilen zweier Erben wäre maximal drei Fünftel dieses Wüstenquadrats, also um ein Zehntel größer als im Fall a1).

a3) Onkel Donald spielt weiter mit den Aufteilungsverhältnissen, weil er den maximalen Unterschied minimieren will. Ihm wird o:w=1:2 und s:n=3:4 gefallen; also h(o):h(w)=1:2 und h(s):h(n)=3:4. Die Einteilung ist so leicht durchschaubar wie im Fall a1): (als Produkt aus halber Höhe und Grundseite) Oliver erhält ein Sechstel, Wayne ein Drittel der Quadratfläche, während Sue-Allen drei Vierzehntel und Nancy zwei Siebtel erhalten; die Differenz zwischen den Anteilen zweier Erben ist maximal ein Sechstel dieses Wüstenquadrats, also um zwei Fünfzehntel kleiner als im Fall a1).
Ein weitere Lösung im Sinne Onkel Donalds ist die Vertauschung der Flächen von Sue-Allen und Nancy mit o:w=1:2 und s:n=4:3.

b)

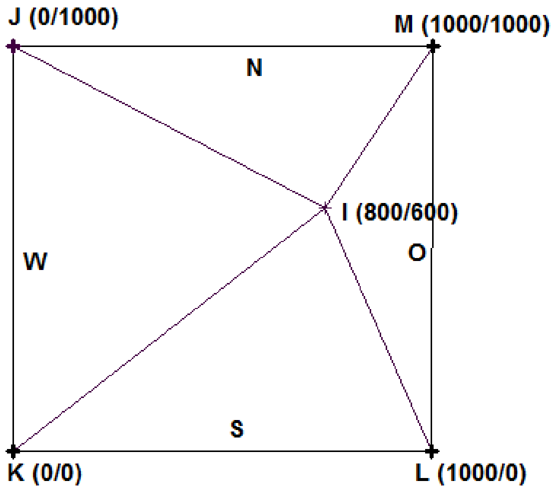


Abb. zu b)

Zunächst legen wir zur Verständigung in einem kartesischen Koordinatensystem (mit LE=1 m) Punkte fest: I(800/600), J(0/1000), K(0/0), L(1000/0) und M(1000/1000). Dann wird aus den Höhen berechnet, wie weit der gemeinsame Punkt aller Teilungsdreiecke I von den Eckpunkten J, K, L und M entfernt ist.
(1) $IJ^2 = 800^2 + 400^2 = 800000$
(2) $IK^2 = 800^2 + 600^2 = 1000000 = 1000^2$
(3) $IL^2 = 200^2 + 600^2 = 400000$
(4) $IM^2 = 200^2 + 400^2 = 200000$
1. Das Dreieck IMJ ist rechtwinklig; denn das ergibt sich aus (1), (4) und der Umkehrung des Satzes von Pythagoras.
2. Das Dreieck IKL ist gleichschenklig spitzwinklig, weil nach (2) IK und KL gleich lang sind und ferner die Basis IL kleiner als die Schenkel ist [vgl. (3)].
3. Das Dreieck IJK ist gleichschenklig spitzwinklig, weil nach (2) IK und JK gleich lang sind und ferner die Basis IJ kleiner als die Schenkel ist. [vgl. (1)].
4. Es bleibt zu zeigen, dass das Dreieck ILM stumpfwinklig ist. Die Lage von I garantiert die Existenz des Dreiecks ILM. Ein rechtwinkliges Dreieck mit Katheten, welche die Längen von IL und IM hätten (siehe (3) und (4)), hätte eine fast 774,60 m lange Hypotenuse – also wesentlich kleiner als die Länge von ML. Somit ist ILM stumpfwinklig, da der größeren Seite der größere Winkel gegenüber liegt.

Aufgabe 3 (Probleme des Teilens):

Fall „Teiler 3?“: Ein Summand ist Vielfaches von 3, der andere müsste für die Teilbarkeit durch 3 auch den Teiler 3 enthalten, hat aber nur Potenzen von 2 als Teiler. 3 ist also kein Teiler von s.
Fall „Teiler 5?“: 231 ist ein ungerader Exponent; Hinweis: 231 ist das Produkt von 3, 7 und 11. Wir nutzen den Satz: „Summen zweier Potenzen mit gleichem ungeraden Exponenten enthalten die Summe der Basen als Teiler“, den wir in zwei Schritten beweisen wollen.
Zunächst weisen wir nach: „Differenzen zweier Potenzen mit gleichem positiven, natürlichen Exponenten enthalten die Differenz der Basen als Teiler.“ Für alle $x, y \in IR^{\neq 0}$ und $i \in IN^{>0}$ gilt

$$\begin{aligned} x^i - y^i = \\ & x^i + x^{i-1}y + x^{i-2}y^2 + \ldots + x^3y^{i-3} + x^2y^{i-2} + xy^{i-1} \\ & -[x^{i-1}y + x^{i-2}y^2 + x^{i-3}y^3 + \ldots + x^2y^{i-2} + xy^{i-1} + y^i] \\ & = (x-y)\cdot(x^{i-1} + x^{i-2}y + x^{i-3}y^2 + \ldots + x^2y^{i-3} + xy^{i-2} + y^{i-1}) \end{aligned}$$

Daraus folgt für positives natürliches n und i= 2n-1, x=a, y=(-b) der Nachweis für den gesuchten Satz als Sonderfall des obigen:

$$a^{2n-1} - (-b)^{2n-1} =$$
$$(a+b)\cdot\{a^{2n-2} + a^{2n-3}(-b) + a^{2n-4}(-b)^2 + \ldots + a^2(-b)^{2n-4} + a(-b)^{2n-3} + (-b)^{2n-2}\}$$

Wir fahren fort mit Fall „Teiler 5?“.
$2^3 + 3^3 = 8 + 27 = 35$ enthält die Teiler 5 und 7, dann auch $(2^3)^{77} + (3^3)^{77} = s$.
Damit ist auch schon der Fall „Teiler 7?“ behandelt.
Fall „Teiler 11?“:

$$2^7 + 3^7 = 128 + 2187 = 2315 = 5 \cdot 463$$
$$2^{11} + 3^{11} = 2048 + 177147 = 179195 = 5 \cdot 35839$$

5, 463 und 35839 sind Primzahlen. Eine Teilbarkeit durch 11 lässt sich also nicht erschließen, lässt sie sich evtl. ausschließen? – Hierzu betrachten wir Restklassen modulo 11.
$32 = 2 \cdot 11 + 10 = 3 \cdot 11 + (-1)$; also gilt $2^5 = 32 \equiv (-1) mod 11$. Daraus ergibt sich $2^{230} = 2^{5 \cdot 46} \equiv (-1)^{46} mod 11 \equiv (+1) mod 11$, $2^{231} = 2 \cdot 2^{230} \equiv 2 \cdot (+1) mod 11 \equiv (+2) mod 11$.
$3^5 = 243 = 11 \cdot 22 + 1 \equiv (+1) mod 11$, also gilt $3^{230} = 3^{5 \cdot 46} \equiv (+1)^{46} mod 11 \equiv (+1) mod 11$.
Daraus folgt $3^{231} = 3 \cdot 3^{230} \equiv (+3) mod 11$.
Folglich gilt $2^{231} + 3^{231} \equiv (+2) mod 11 + (+3) mod 11 \equiv (+5) mod 11$. Die Division von s durch 11 hinterlässt einen Rest von 5; also ist 11 kein Teiler von s. Damit ist dieses Problem von Sabine und Bastian geklärt.

Aufgabe 4 (Eine Schifffahrt ist lustiger)

Hierbei handelt es sich um unsere sog. Scherzaufgabe. Es gibt keine eindeutige Lösung. Die Bewertung erfolgt nach Kreativität im Lösungsansatz.

Eine mögliche Lösung:

Zwischen Bernkastel-Kues und Zeltingen-Rächtig befindet sich eine große Moselschleuse. Dort passen zwei Schiffe hinein, so dass beide Schiffe in einem Schleusengang die Schleuse durchfahren und damit das erste Schiff eingeholt wird.

Andere Ideen: das erste Schiff legt für einen Fotostopp an der Wehlener Sonnenuhr an, ein Passagier hat was Wichtiges vergessen an Land, so dass das vordere Schiff noch mal zurück muss, …