1. Aufgabe (Alles ist Mathematik – Zerlegungen überall):

a)

Es gibt für den Zahlenbereich der natürlichen Zahlen sechs mögliche Lösungen:

5+6+7=4+6+8=3+6+9=2+6+10=1+6+11=6+6+6=18

In anderen Zahlbereichen kann man natürlich unendlich viele Lösungen produzieren.

b)

125 kann in 25+25+25+25+25 = 125 zerlegt werden.
Die mittlere Zahl dieser Zerlegung ist 25.
Wie groß kann der Unterschied (Differenz) zwischen zwei benachbarten Zahlen höchstens sein?
Zwischen dem ersten und dem mittleren Summanden liegt der Unterschied zweimal. 25 minus zweimal den Unterschied muss eine natürliche Zahl sein, der Unterschied kann also maximal nur 12 zwischen zwei benachbarten Zahlen sein.

Deshalb sind *nur* folgende Zerlegungen möglich:
23+24+25+26+27=125
21+23+25+27+29=125
19+22+25+28+31=125
17+21+25+29+33=125
15+20+25+30+35=125
13+19+25+31+37=125
11+18+25+32+39=125
9+17+25+33+41=125
7+16+25+34+43=125
5+15+25+35+45=125
3+14+25+36+47=125
1+13+25+37+49=125

c)
Alle Summanden sollen, ungerade sein und größer Null, deshalb gilt für $n \in IN$:
2n+1 sei der Term für die kleinste geforderte ungerade natürliche Zahl, der nächst größere Term ist dann 2n+3.
Für die folgenden vier weiteren Terme für ungeraden Zahlen gilt dann 2n+5, 2n+7, 2n+9 und 2n+11. Man erkennt leicht, dass sich je zwei benachbarte Zahlen immer um 2 unterscheiden.
Addiert man die sechs Terme so erhält man:
$(2n+1) + (2n+3) + (2n+5) + (2n+7) + (2n+9) + (2n+11) = 6 \cdot 2n + 36 = 12\ (n+3)$
Diese Summe soll gleich 2016 sein.
Termumformungen liefern:
$\Leftrightarrow 2016 = 12\ (n+3)$
$\Leftrightarrow 168 = n + 3$
$\Leftrightarrow 165 = n$

Für die kleinste ungerade Zahl gilt: (Term T(n) = 2n+1), also T(165) = 2·165+1 = 331
Die kleinste Zahl ist 331.
Eine mögliche Zerlegung von 2016 ist 331+333+335+337+339+341 = 2016.

d)
Da der Abstand zwischen zwei ungeraden Zahlen immer gerade ist, gilt folgender Ansatz:
(Der Term 2n+1 entspricht hier der kleinsten ungeraden natürlichen Zahl)

(2n+1)+ (2n+1+2x)+ (2n+1+4x)+ (2n+1+6x)+ (2n+1+8x)+ (2n+1+10x)=12n+30x+6
Also 12n+30x+6=2016 bzw. nach einigen Termumformungen 2n+5x =335

Welche Lösungen gibt es überhaupt? Wir führen dazu eine vollständige Fallunterscheidung durch. Wie man sieht, muss man nur die Termwerte für ungerade x untersuchen:

x	2|335-5x	n	kleinste Zahl 2n+1	Zerlegungen von 2016
0	nein	-	-	
1	ja	165	331	331, 333, 335, 337, 339, 341
2	nein	-		
3	ja	160	321	321, 327, 333,339, 345, 351
5	ja	155	311	311, 321, 331, 341, 351, 361
7	ja	150	301	301,315, 329, 343, 357, 371
9	ja	145	291	291, 309, 327, 345, 363, 381
11	ja	140	281	281, 303,325, 347, 369,391
13	ja	135	271	271, 287, …
15	…	130	261	261, 291, …
17	…	125	251	251, 285, …
...	…	…	…	…
65	ja	5	11	11, 141, 271, 401, 531, 661
67	ja	0	1	1, 135, 269, 403, 537, 671

2. Aufgabe (Schlussverkauf):

Anita und Gaby haben zusammen a Euros und b Cent, a und b sind positive ganze Zahlen. Das sind $\left(a + \frac{b}{100}\right)$ Euro, bevor sie sich in den Sommerschlussverkauf stürzen. Sie haben 3/4 ihres Geldes ausgegeben, also haben sie noch $\frac{1}{4}$ des Geldes: $\frac{a}{4} + \frac{b}{400}$. Das entspricht $\frac{b}{2}$ Euro $+ a$ Cent $= \frac{b}{2}$ Euro $+ \frac{a}{100}$ Euro.

Damit ergibt sich die folgende Gleichung:

$$\frac{a}{4} + \frac{b}{400} = \frac{b}{2} + \frac{a}{100}$$
$$100a + b = 200b + 4a$$
$$96a = 199b$$

Daraus folgt, dass die Primzahl 199 ein Teiler von a ist, also gilt: $a = 199 \cdot n$, mit $n = 1,2,3, \dots$

Für $n \geq$
$n >= \frac{2}{96} \cdot n \cdot 199 = 199 \cdot b$, also $b = 96n$. In diesem Fall wäre $b > 100$. Das widerspricht der Voraussetzung.

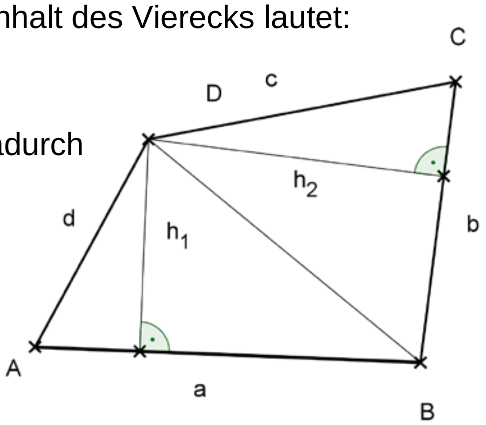
Deshalb gilt: $n = 1$, $a = 199$ und $b = 96$.

Die beiden Mädels besaßen vor ihrem ersten Besuch am Wühltisch 199,96 Euro , wovon sie 149,97 Euro sofort ausgegeben haben.

Aufgabe 3 (Kies im Garten):

Man betrachtet ein Prisma, bestehend aus einem allgemeinen (konvexes) Viereck *ABCD* als Grund und Deckfläche und einer Prismenhöhe von 0,05 m. Dies entspricht einem geraden Prisma. Für das Volumen gilt dann: V = $A_{\text{Grundfläche}}$ ·Höhe. Kann man den Flächeninhalt des Vierecks abschätzen, so hat man auch eine Abschätzung für das Volumen.
Es soll eine Abschätzung für den Flächeninhalt eines Vierecks gegeben werden.
Das Viereck ABCD hat die üblichen Bezeichnungen a, b, c und d für die Längen der vier Seiten und *A* sei die Viereckfläche.
Die Behauptung der obigen Aufgabe für den Flächeninhalt des Vierecks lautet:

$$A_{ABCD} \le \frac{1}{4}(a+c)(b+d) = \frac{1}{4}(ad+bc) + \frac{1}{4}(ab+cd)$$

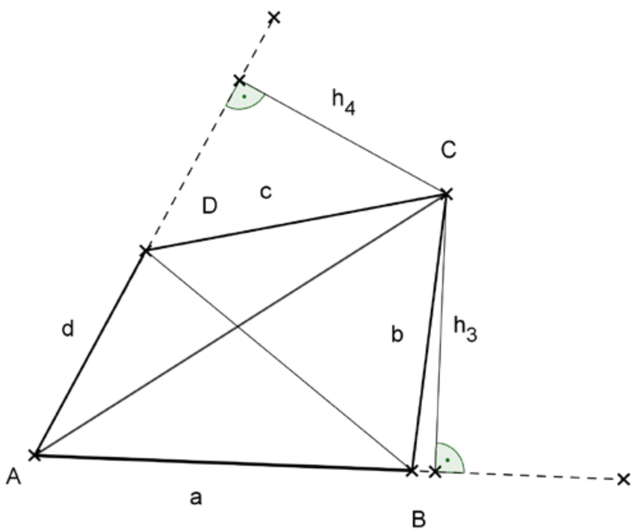


In das Viereck wird die Strecke $\overline{BD}$ eingezeichnet. Dadurch wird das Viereck in zwei Dreiecke)*ABD* und)*BCD* zerlegt. Für den Flächeninhalt von $A_{)ABD}$ gilt folgende Abschätzung:

$A_{ABD} = \frac{1}{2}ah_1 \le \frac{1}{2}ad$. Analog gilt für den Flächeninhalt von)*BCD* folgende Abschätzung:

$A_{BCD} = \frac{1}{2}bh_2 \le \frac{1}{2}bc$.

Deshalb gilt: $\frac{1}{4}ad + \frac{1}{4}bc = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}ad + \frac{1}{2}bc\right) \ge \frac{1}{2}A_{\Delta ABD} + \frac{1}{2}A_{\Delta BCD} = \frac{1}{2}A_{ABCD}$.



Aufgabe 4 (Eine Schifffahrt ist lustiger)

Hierbei handelt es sich um unsere sog. Scherzaufgabe. Es gibt keine eindeutige Lösung. Die Bewertung erfolgt nach Kreativität im Lösungsansatz.

Eine mögliche Lösung:

Zwischen Bernkastel-Kues und Zeltingen-Rächtig befindet sich eine große Moselschleuse. Dort passen zwei Schiffe hinein, so dass beide Schiffe in einem Schleusengang die Schleuse durchfahren und damit das erste Schiff eingeholt wird.

Andere Ideen: das erste Schiff legt für einen Fotostopp an der Wehlener Sonnenuhr an, ein Passagier hat was Wichtiges vergessen an Land, so dass das vordere Schiff noch mal zurück muss, …